שאלה 1

נתונים הוקטורים $\vec{u},\vec{v}$ המקיימים: $|\vec{u}|=1, |\vec{v}|=5, \vec{u}\cdot\vec{v}=0$. נגדיר $\vec{w}=(\vec{u}-\vec{v})\times(2\vec{u}+\vec{v})$, אזי $|\vec{w}|$ שווה ל-

פתרון

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\varphi=0$ כך ש- $\sin\varphi=1$. אבל

$\vec{w}=2\vec{u}\times\vec{u}-2\vec{v}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}-\vec{v}\times\vec{v}=3\vec{u}\times\vec{v}$ כך ש-

$|\vec{w}|=3|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\varphi=15$.

שאלה 2

הוכיחו כי עקום $C=\{(t^2+t,t^2-t,t+1)\mid t\in\mathbb{R}\}$ נמצא במישור. מצאו מרחק מהמישור לראשית:

א) 0 , ב) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, ג) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ד) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, ה) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

תשובה: $\frac{2}{\sqrt{6}}$

פתרון

משוואת המישור P : $ax+by+cz+d=0$.

$$C\subset P$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall t: a(t^2+t)+b(t^2-t)+c(t+1)+d=(a+b)t^2+(a-b+c)t+(c+d)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$a=\frac{d}{2}, b=-\frac{d}{2}, c=-d, d\neq 0$$

משוואת המישור:

$$\frac{d}{2}x-\frac{d}{2}y-d\cdot z+d=0$$

נחלק ב- $\frac{d}{2}$:

$$x-y-2z+2=0$$

מרחק מהראשית למישור:

$$d(O,P)=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

שאלה 3

הוכח או הפרך: אם $|f(x,y)|\le|\sin(x^2y^3)|$ לכל (x,y) במישור אזי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

פתרון

$0\le|f(0,0)|\le|\sin(0^2\cdot 0^3)|$ ולכן $f(0,0)=0$

באופן דומה $0\le|f(h,0)|\le|\sin(h^2\cdot 0^3)|$ ולכן $f(h,0)=0$, באופן אנלוגי $f(0,h)=0$.

מכאן נובע שאם נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה לפי ההגדרה בראשית , נקבל ששתי הנגזרות שוות לאפס בראשית. לכן $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

ז"א $0\le|\varepsilon|=\left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le\left|\frac{\sin(\Delta x^2\Delta y^3)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le\left|\frac{\Delta x^2\Delta y^3}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|$. אם $\Delta x=0$ ו- $\Delta y\to 0$

אז ברור כי $\varepsilon\to 0$. באופן דומה עבור $\Delta y=0$ ו- $\Delta x\to 0$ נסיק כי $\varepsilon\to 0$.

אם $\Delta x\ne 0$, $\Delta y\ne 0$ אז $0\le\left|\frac{\Delta x^2\Delta y^3}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le\left|\frac{\Delta x^2\Delta y^3}{\sqrt{\Delta x^2}}\right|=|\Delta x\cdot\Delta y^3|\to 0$

עבור $\Delta y\to 0$, $\Delta x\to 0$.

לסיכום הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה 4

הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+2x^2+y^4)-xy^4}{2x^2+y^4}$ שווה ל-...

פתרון

נשתמש בגבול ידוע: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

אם נסמן $t=2x^2+y^4$ אזי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+2x^2+y^4)}{2x^2+y^4}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

לחישוב $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^4}{2x^2+y^4}$ נשתמש בזהות $\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right|\le\frac{1}{2}$:

$0\le\left|\frac{xy^4}{2x^2+y^4}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}xy^2}{2x^2+y^4}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}|y^2|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}|y^2|\to 0$, כאשר $\Delta x\to 0$ וגם $\Delta y\to 0$.

ולכן $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^4}{2x^2+y^4}=0$. לסיכום $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+2x^2+y^4)-xy^4}{2x^2+y^4}=1$

שאלה 5:

המשוואה

$$x^2 u + \int_1^u t^2 e^{-t^3} dt = u$$

מגדירה פונקציה $u=f(x)$ בסביבת $(x,u)=(1,1)$. מהו $f'(1)$?

<u>פתרון:</u>

נגדיר $F(x,u) = x^2 u + \int_1^u t^2 e^{-t^3} dt - u$. נשתמש במשפט על פונקציות סתומות:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = x^2 + u^2 e^{-u^3} - 1 \ , \ \frac{\partial F}{\partial x} = 2xu .$$

לכן מתקבל $f'(1) = -2e$

שאלה 6 :

נתונה קופסה (ללא מכסה) עם המידות: x – אורך , y – רוחב , z- גובה. נפח התיבה שווה ל- 4 יחידות נפח. מה הן מידות התיבה כך ששטח הפנים של התיבה הוא המינימאלי?

תשובה: $z=1 \ , \ x=y=2$

פתרון:

שטח הפנים של הקופסה

$$x>0, y>0, z>0 \ , \ S(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy$$

התנאי: $V = xyz = 4$.

מהתנאי $z = \frac{4}{xy}$, לכן

$$S\left(x, y, \frac{4}{xy}\right) = 8\frac{1}{y} + 8\frac{1}{x} + xy = f(x,y)$$

נקודות קיצון עבור $f(x,y)$ פותרות את המערכת:

$$x=y=2 \Leftarrow \begin{cases} f'_x = \frac{-8}{x^2} + y = 0 \\ f'_y = \frac{-8}{y^2} + x = 0 \end{cases}$$

(ברור כי זהו מינימום, שכן ניתן להגדיל את שטח הפנים כרצוננו)